CMA211 - Cálculo 2a - Prova 2

29 de abril de 2019

Nome: ____

Instruções:

- A prova pode ser escrita a lápis, **mas a resposta final deve ser escrita a caneta**
- Durante a prova só poderão ser utilizados **lápis, borracha e caneta**. Se algum outro item for utilizado, será atribuída nota **zero** à prova.
- A resolução da questão deverá explicitar todos os passos realizados no cálculo. Não será aceita somente a resposta final sem o devido desenvolvimento.

Formulário:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{||(h,k)||} = 0$$

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\rangle$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{df}{dt} = \vec{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$f(x,y) = k$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$$

$$f(x_b,y_b) - f(x_a,y_a) = \vec{\nabla} f(x_c,y_c) \cdot \langle x_b - x_a, y_b - y_a \rangle$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, H(x,y) > 0 \rightarrow$ mínimo local
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, H(x,y) > 0 \rightarrow$ máximo local
- $H(x,y) < 0 \rightarrow$ ponto de sela
- $H(x,y) = 0 \rightarrow$ indeterminado

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2$$

$$\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0,y_0)$$

Questões:

1. (1,0) Calcule $\dfrac{df}{dt}$ da função $f(x,y) = \cos(xy)$, dada a parametrização $x(t) = e^t$ e $y(t) = t^2$

2. (1,0) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ da função implícita $z(x,y)$ dada pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

3. (2,5) Dada a função $f(x,y) = e^{x^2-y^2} + xy$, determine

   a) (1,0) o vetor gradiente da função

   b) (0,25) o vetor que representa a direção de maior aumento da função no ponto (1,1)

   c) (0,25) o vetor que representa a direção de maior diminuição da função no ponto (1,1)

   d) (1,0) a taxa de variação da função no ponto (1,1) na direção do vetor $\vec{v} = \langle 2, 1 \rangle$

4. (1,0) Determine a melhor aproximação (i.e., o polinômio de Taylor) de ordem 2 da função $f(x,y) = x^2 + y^3$ em torno do ponto (1,1).

5. (1,5) Dada a função $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$, determine se seus pontos críticos são pontos de máximo local, mínimo local, ponto de sela ou indeterminado.

6. (1,5) Determine os pontos de máximo e mínimo global de $f(x,y) = 3x - y$ no domínio fechado formado pelo triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,1).

7. (1,5) Encontre os pontos de máximo e mínimo da função $f(x,y) = xy$, dada a restrição $x^2 + 4y^2 = 8$